Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 11 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(3 Punkte)* Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexe Folgen, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sei und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Zeige, dass die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Lösung. Da die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert ein $R > 0$, sodass

$$\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset B[0, R] = [-R, +R].$$

Insbesondere erhalten wir

$$|b_n| \leq R \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \varepsilon/R$ für $n \geq N$, da a_n gegen 0 konvergiert. Wir finden also

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq R|a_n| < R\frac{\varepsilon}{R} = \varepsilon$$

für $n \geq N$. ■

Aufgabe 2: *(3 Punkte)* Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen mit Grenzwerten $a, b \in \mathbb{R}$, d.h. $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow b$, jeweils für $n \to \infty$, und es gelte $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folgere daraus die Gültigkeit von $a \leq b$.

Gilt diese Folgerung auch, falls $a_{n_k} \leq b_{n_k}$ nur entlang *einer* Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ gilt?

Lösung. Wir formulieren zwei mögliche Lösungswege:

(1) <u>*Direkter Beweis:*</u> Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow b$ existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \wedge \quad |b_n - b| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N \text{ gilt.}$$

Insbesondere gilt daher

$$a - \varepsilon < a_n \quad \wedge \quad b_n < \varepsilon + b \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Aufgrund von $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgern wir

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n < \varepsilon + b \qquad \Longrightarrow \qquad a \leq b + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $a \leq b$.

(2) <u>*Indirekter Beweis:*</u> Angenommen $a > b$, dann stellen wir einen Widerspruch zu $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ her. Wir schreiben

$$a_n - b_n = a_n - a + a - b + b - b_n \geq a - b - |a_n - a| - |b_n - b|$$

und aufgrund der Konvergenz der Folgen existiert für $\varepsilon > 0$ wieder $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \wedge \quad |b_n - b| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N \text{ gilt.}$$

Also erhalten wir

$$a_n - b_n \geq a - b - 2\varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Nach Voraussetzung gilt $a - b > 0$, also können wir im Speziellen die Wahl $\varepsilon = \frac{a-b}{4} > 0$ treffen, womit der Widerspruch

$$a_n - b_n \geq a - b - 2\left(\frac{a-b}{4}\right) = \frac{a-b}{2} > 0$$

für $n \geq N$ gilt.

In beiden Fällen ist $a_{n_k} \leq b_{n_k}$ entlang einer Teilfolge ausreichend, da Teilfolgen konvergenter Folgen stets gegen denselben Grenzwert konvergieren und wir obige Beweise auch entlang dieser Teilfolge durchführen könnten. ■

Aufgabe 3: *(4 Punkte)* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge mit $a_n \longrightarrow a$ für $n \to \infty$. Beweise, dass auch die Konvergenz

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \longrightarrow a \qquad \text{für } n \to \infty$$

der Mittelwerte gilt.

Hinweis: Schreibe

$$\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - a\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right|$$

und benutze zuerst die Konvergenz $a_n \longrightarrow a$ und dann die Konvergenz $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.

Lösung. Wegen $a_n \longrightarrow a$ existiert für $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir benutzen den Hinweis und rechnen für $n \geq N$, dass

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - a| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|a_k - a| \\
&< \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\varepsilon/2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|a_k - a| + \frac{(n-(N-1))}{n}\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|a_k - a| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

gilt. Wegen $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$ existiert ferner ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|a_k - a| < \varepsilon/2 \qquad \text{für } n \geq M.$$

Für alle $n \geq \max(M, N)$ folgt deswegen

$$\left| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right) - a \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

was zu zeigen war. ■